第13回　転がり

　斜面に沿って x 軸、垂直方向に y 軸をとる。

$$M\boldsymbol{g} = Mg\sin\theta\boldsymbol{e}_x - Mg\cos\theta\boldsymbol{e}_y$$
$$\boldsymbol{N} = N\boldsymbol{e}_x : \text{垂直抗力}$$
$$\boldsymbol{R} = -R\boldsymbol{e}_x : \text{静止摩擦力}$$

並進運動

$$M\ddot{x} = Mg\sin\theta - R$$

回転運動（摩擦力が力のモーメントを発生させる）

$$I_G\ddot{\phi} = aR \quad (\text{回転角}\phi\text{は時計回りを正})$$

円柱の慣性モーメント

$$I_G = \frac{1}{2}Ma^2$$

滑らずに転がるとき $x = a\phi$、$\dot{x} = a\dot{\phi}$、$\ddot{x} = a\ddot{\phi}$

$$R = \frac{I_G}{a}\ddot{\phi} = \frac{I_G}{a^2}\ddot{x}$$
$$\ddot{x} = g\sin\theta - \frac{R}{M} = g\sin\theta - \frac{I_G}{Ma^2}\ddot{x}$$
$$\left(1 + \frac{I_G}{Ma^2}\right)\ddot{x} = g\sin\theta$$
$$\ddot{x} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_G}{Ma^2}} = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

　転がりの運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}M\left(1 + \frac{I_G}{Ma^2}\right)\dot{x}^2$$

となる。