第10回　慣性モーメントの計算

z 軸まわりの慣性モーメントは

$$I = \int \xi^2 \rho(\boldsymbol{r}) dV = \int (x^2 + y^2) \rho(\boldsymbol{r}) dV$$

並行軸の定理

質量中心 (x_G, y_G) からの変位が (x', y') のとき

$$x = x_G + x'$$
$$y = y_G + y'$$

回転軸のまわりの慣性モーメントは

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2 + y^2) \rho(\boldsymbol{r}) dV \\ &= \int \{(x_G + x')^2 + (y_G + y')^2 \rho(\boldsymbol{r}) dV \\ &= (x_G^2 + y_G^2) \int \rho(\boldsymbol{r}) dV + \int (x'^2 + y'^2) \rho(\boldsymbol{r}) dV \\ &= I_G + Mh^2 \\ h^2 &= x_G^2 + y_G^2 \end{aligned}$$

平板剛体に関する定理

平板剛体の z 軸まわりの慣性モーメントは

$$I_z = \int (x^2 + y^2) \sigma(\boldsymbol{r}) dS$$

x 軸および y 軸まわりの慣性モーメント $(z = 0)$ は

$$I_x = \int (y^2 + z^2) \sigma(\boldsymbol{r}) dS = \int y^2 \sigma(\boldsymbol{r}) dS$$
$$I_y = \int (z^2 + x^2) \sigma(\boldsymbol{r}) dS = \int x^2 \sigma(\boldsymbol{r}) dS$$

これから

$$I_z = I_x + I_y$$

が成り立つ。