

第6回 力のモーメントと角運動量

力のモーメント（トルク）

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$N = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \sin \theta$$

角運動量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = mr^2\boldsymbol{\omega}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N}$$

$\mathbf{N} = 0$ のとき、角運動量 \mathbf{L} は保存する。

中心力場の運動

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_r + mr \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2$$

$$mr \frac{d^2 \phi}{dt^2} = F_\phi - 2m \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt}$$

$F_\phi = 0$ のとき（中心力）

$$mr \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -2m \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt}$$

$$r \frac{d\omega}{dt} = -2\omega \frac{dr}{dt}$$

$$\int \frac{d\omega}{\omega} = -2 \int \frac{dr}{r}$$

$$\omega = \frac{C}{r^2}$$

$mr^2\omega = mC = L$: 角運動量の保存

$$\omega = \frac{L}{mr^2}$$

動径方向の運動

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_r + \frac{L^2}{mr^3}$$

面積速度

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} r^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{L}}{2m}$$