重力と Kepler の法則

高 杉

軌道の極座標表示

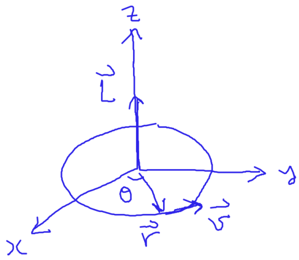
　天体 (惑星、質量 m) の運動について考える。中心天体 (太陽、質量 M) との間に重力がはたらき、重力ポテンシャルエネルギーは

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

である。G は重力定数である。$\vec{r}$ は天体の位置、r はその大きさである。$M \gg m$ であり、中心天体は動かないとする。
　系の角運動量 $\vec{L}$ は

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

である。$\vec{v}$ は天体の速度である。孤立系では角運動量が保存する。$\vec{L}$ の方向を z 方向にとると、天体の軌道はこれに垂直な平面内にあることがわかる。そこで、$\vec{r}$ と $\vec{v}$ を $x-y$ 平面内にとることにする。
　位置を極座標で表示する。



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

速度は

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\omega\hat{\theta}$$

$\hat{r}$ および $\hat{\theta}$ はそれぞれ r 方向および θ 方向の単位ベクトルである。角運動量の大きさは

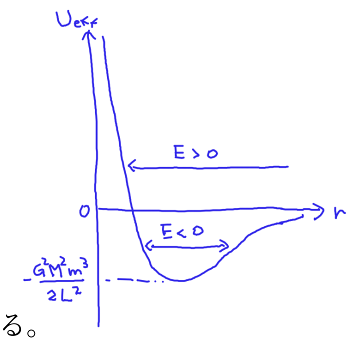
$$L = mrv_{\perp} = mr^2\omega$$

　運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$
$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

　孤立系では力学的エネルギーが保存する。

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$



有効ポテンシャルエネルギーを

$$U_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

とすると、半径方向の運動は U_{eff} と E によって決まることがわかる。

天体の軌道

力学的エネルギー保存の式より

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}\right)}$$

これから

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}\right)}}$$

また、角運動量保存の式

$$L = mr^2\omega = mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

より

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{L}{mr^2}dt \\ &= \frac{\frac{Ldr}{r^2}}{\sqrt{2m\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}\right)}} \end{aligned}$$

さらに $\frac{1}{r} = u$ とおくと、$-\frac{dr}{r^2} = du$ より

$$\begin{aligned} \int d\theta &= -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - u^2 + \frac{GMm^2}{L^2}u}} \\ &= -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{G^2M^2m^4}{L^4} - \left(u - \frac{GMm^2}{L^2}\right)^2}} \end{aligned}$$

となる。ここで $\frac{2mE}{L^2} + \frac{G^2M^2m^4}{L^4} = c^2$、$u - \frac{GMm^2}{L^2} = t$ とおくと

$$\int d\theta = -\int \frac{dt}{\sqrt{c^2 - t^2}}$$

さらに $t = c\cos\phi$ とおくと $dt = -c\sin\phi d\phi$ より

$$\int d\theta = \int d\phi$$

すなわち

$$\theta = \phi \text{ (積分定数を 0 とする)}$$

これから

$$\begin{aligned} c\cos\theta = t &= u - \frac{GMm^2}{L^2} \\ u = \frac{1}{r} &= \frac{GMm^2}{L^2} + c\cos\theta \end{aligned}$$

ここで $\dfrac{L^2}{GMm^2} = l$、$cl = e$ とおくと

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$$

となる。これは e を離心率とする二次曲線 (円錐曲線) である。l は通径とよばれる。

二次曲線

上の式より

$$l = r + er\cos\theta = r + ex$$
$$r^2 = x^2 + y^2 = (l - ex)^2$$

i) $e = 0$ のとき

$$c^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{G^2M^2m^4}{L^4} = 0$$

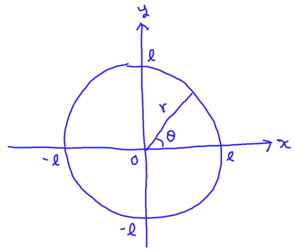
より

$$E = -\frac{G^2M^2m^3}{2L^2}$$

すなわち、E は U_{eff} の最小値に等しい。このとき

$$x^2 + y^2 = l^2$$

となって円を描く。



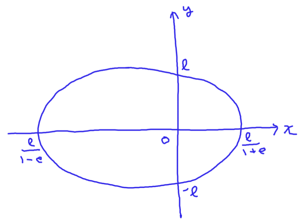
ii) $0 < e < 1$ のとき $(1 - e^2 > 0)$

$$(1 - e^2)x^2 + 2elx + y^2 = l^2$$

さらに

$$(1 - e^2)\left(x + \frac{el}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = l^2 + \frac{l^2e^2}{1 - e^2} = \frac{l^2}{1 - e^2}$$

となって楕円を描く。



iii) $e = 1$ のとき

$$c^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{G^2M^2m^4}{L^4} = \frac{1}{l^2} = \frac{G^2M^2m^4}{L^4}$$

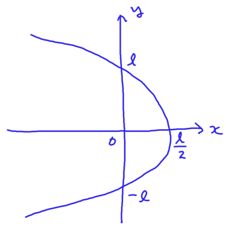
より

$$E = 0$$

となる。このとき

$$y^2 = l^2 - 2lx = -2l\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

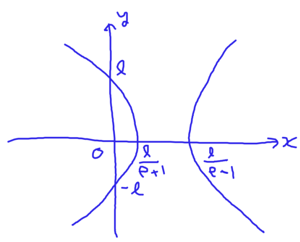
となって放物線を描く。



iv) $e > 1$ のとき $(e^2 - 1 > 0)$

$$(e^2 - 1)\left(x - \frac{el}{e^2 - 1}\right)^2 - y^2 = \frac{l^2}{e^2 - 1}$$

となって双曲線を描く。



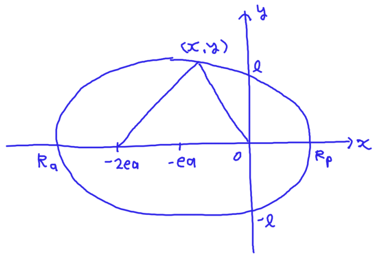
第 1 法則

惑星の軌道は離心率 e の小さな楕円を描く。これは前項の ii) に該当する。このとき惑星は U_{eff} に束縛された運動をする。

楕円

$$(1-e^2)\left(x+\frac{el}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{l^2}{1-e^2}$$

の長半径は $a=\dfrac{l}{1-e^2}$、短半径は $b=\dfrac{l}{\sqrt{1-e^2}}$ である。このとき



$$\left(\frac{x+ea}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

と表される。

原点と (-2ea,0) からの距離の和が一定 $2C$ であるような軌道 (x,y) を考える。

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x+2ea)^2+y^2}=2C$$

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=\left(2C-\sqrt{(x+2ea)^2+y^2}\right)^2\\&=4C^2-4C\sqrt{(x+2ea)^2+y^2}+(x+2ea)^2+y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C\sqrt{(x+2ea)^2+y^2}&=C^2+eax+e^2a^2\\C^2((x+2ea)^2+y^2)&=\left(C^2+eax+e^2a^2\right)^2\end{aligned}$$

これを整理して

$$\begin{aligned}(C^2-e^2a^2)(x+ea)^2+C^2y^2&=C^2(C^2-e^2a^2)\\\frac{(x+ea)^2}{C^2}+\frac{y^2}{C^2-e^2a^2}&=1\end{aligned}$$

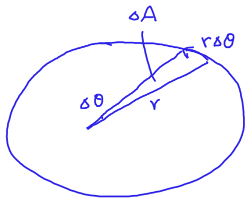
これは楕円であり、原点と (-2ea,0) は焦点である。$C=a$ であることがわかる。

惑星は太陽を焦点のひとつとする楕円軌道を描いて運動する。

第 2 法則

惑星が微小時間に掃く面積は

$$\Delta A=\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$$



である。面積速度は

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}r^2\omega=\frac{L}{2m}$$

である。角運動量 L は一定であるので、面積速度も一定となる。

惑星の面積速度は一定である。

第 3 法則

楕円軌道の面積は

$$A = \pi ab = \frac{\pi c^2}{(1-e^2)^{3/2}} = \pi c^2 \left(\frac{a}{l}\right)^{3/2}$$

面積速度が一定であるので、軌道の周期は

$$T = \frac{A}{\dfrac{dA}{dt}} = \frac{2\pi mc^2}{L} \left(\frac{a}{l}\right)^{3/2}$$

$$T^2 = \left(\frac{2\pi mc^2}{L}\right)^2 \left(\frac{a}{l}\right)^3$$

となる。

惑星の周期の 2 乗は軌道長半径の 3 乗に比例する。