三角関数の微分

高 杉

Sin x/x の極限

関数 $\frac{\sin x}{x}$ は $x = 0$ では定義されないが、$x \to 0$ の極限値を求めることができる。底辺 OA の長さが 1 で、∠AOB= x であるような直角三角形 OAB を考える。辺 OB 上に OA = OC であるような点 C を取る。三角形 OAB の面積は $\frac{1}{2}\tan x$、扇型 OAC の面積は $\frac{1}{2}x$、三角形 OAC の面積は $\frac{1}{2}\sin x$ となる。これらの関係は

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

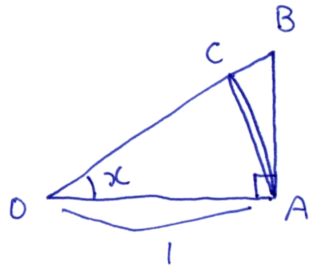
これから

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

となり、$\cos x = 1$ $(x \to 0)$ より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

となることがわかる。



(Cos x-1)/x の極限

上の結果を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{(\cos x + 1)}x\\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

Sin x の微分

関数 $\sin x$ の微小区間 $x \sim x + \Delta x$ における平均変化率の極限として微分を求める。

$$\begin{aligned}\frac{d\sin x}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x + \cos x\sin\Delta x - \sin x}{\Delta x}\\ &= \sin x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\\ &= \cos x\end{aligned}$$

Cos x の微分

関数 $\cos x$ の微分を求める。

$$\begin{aligned}
\frac{d\cos x}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x-\cos x}{\Delta x} \\
&= \cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}-\sin x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

合成関数の微分

2 つの関数 $y=f(u)$ と $u=g(x)$ があるとき

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\
&= \frac{df(u)}{du}\frac{dg(x)}{dx}
\end{aligned}$$

である。

$x=\omega(t-t_0)$ とすると、$\frac{dx}{dt}=\omega$ であるので

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sin\omega(t-t_0) &= \frac{d}{dx}\sin x\frac{dx}{dt} \\
&= \omega\cos x \\
&= \omega\cos\omega(t-t_0)
\end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\cos\omega(t-t_0) &= \frac{d}{dx}\cos x\frac{dx}{dt} \\
&= -\omega\sin x \\
&= -\omega\sin\omega(t-t_0)
\end{aligned}$$

となる。