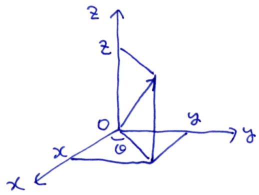
多重積分

高 杉

座標系

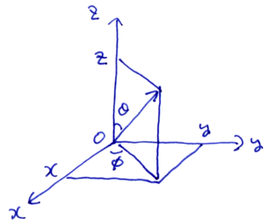
円筒座標では 3 次元の座標は (r, θ, z) で表される。直交座標 (x, y, z) との関係は



$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
z &= z
\end{aligned}
$$

である。

球座標では 3 次元の座標は (r, θ, ϕ) で表される。直交座標 (x, y, z) との関係は



$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

である。

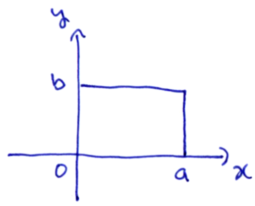
面積分

複数の変数にわたる積分はそれぞれの変数ごとに積分を行えばよい。図のような矩形の面積を求めるには

$$
\int_0^a dx \int_0^b dy = [x]_0^a \, [y]_0^b = ab
$$

のように積分を行う。また、関数 $f = xy$ を同じ矩形領域で積分すると

$$
\begin{aligned}
\int_0^a dx \int_0^b dy xy &= \int_0^a x dx \int_0^b y dy \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b \\
&= \frac{a^2 b^2}{4}
\end{aligned}
$$



となる。

半径 R の円筒表面の面積要素は $dxdy = Rd\theta dz$ である。円筒の表面積は

$$
\int_0^{2\pi} Rd\theta \int_0^L dz = R\,[\theta]_0^{2\pi}\,[z]_0^L = 2\pi RL
$$

となる。

半径 R の球表面の面積要素は $dxdy = R^2\sin\theta d\theta d\phi$ である。球の表面積は

$$
\int_0^{\pi} R^2\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = R^2\,[-\cos\theta]_0^{\pi}\,[\phi]_0^{2\pi} = 4\pi R^2
$$

となる。

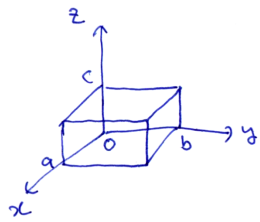
体積分

図のような直方体の体積を求める。

$$\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz = [x]_0^a \, [y]_0^b \, [z]_0^c = abc$$

また、関数 $f = xy + z^2$ を同じ直方体内で積分すると

$$\begin{aligned}
\int_0^a dx \int_0^b dy (xy + z^2) &= \int_0^a xdx \int_0^b ydy \int_0^c dz + \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c z^2 dz \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b [z]_0^c + [x]_0^a \, [y]_0^b \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^c \\
&= \frac{a^2 b^2 c}{4} + \frac{abc^3}{3}
\end{aligned}$$



となる。

円筒座標の体積要素は $dxdydz = rdrd\theta dz$ である。円筒の体積は

$$\begin{aligned}
\int_0^R rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz &= \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} \, [z]_0^L \\
&= \pi R^2 L
\end{aligned}$$

となる。

球座標の体積要素は $dxdydz = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$ である。球の体積は

$$\begin{aligned}
\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [-\cos\theta]_0^\pi \, [\phi]_0^{2\pi} \\
&= \frac{4\pi}{3} R^3
\end{aligned}$$

となる。関数 $f = z^2 = r^2 \cos^2\theta$ を半径 R の球内で積分する。

$$\begin{aligned}
I &= \iiint r^4 \cos^2\theta \sin\theta dr d\theta d\phi \\
&= \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi
\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta = -\int_1^{-1} t^2 dt \qquad (\cos\theta = t \text{ とおく})$$

であるので

$$\begin{aligned}
I &= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R \left[-\frac{t^3}{3}\right]_1^{-1} [\phi]_0^{2\pi} \\
&= \frac{4}{15}\pi R^5
\end{aligned}$$

となる。