慣性モーメント

高 杉

計算方法

慣性モーメントは

$$I = \int \rho r'^2 dV$$

ここで r' は回転軸からの距離である。質量密度を ρ とすると、質量は

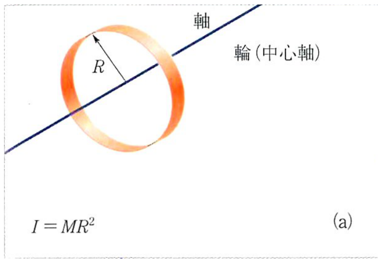
$$M = \int \rho dV$$

で求められる。体積要素は

$$\begin{aligned} dV &= dxdydz && (\text{直交座標}) \\ &= rdrd\theta dz && (\text{円筒座標}) \\ &= r^2 \sin\theta drd\theta d\phi && (\text{球座標}) \end{aligned}$$

である。

(a) 輪 (中心軸)



円筒座標を用いる。質量は

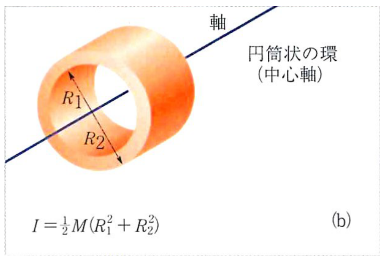
$$\begin{aligned} M = \iint \rho R d\theta dz &= \rho R \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[z\right]_0^L \\ &= 2\pi\rho RL \end{aligned}$$

$r' = r = R$ である。慣性モーメントは

$$\begin{aligned} I = \iint \rho R^3 d\theta dz &= \rho R^3 \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[z\right]_0^L \\ &= 2\pi\rho R^3 L \\ &= MR^2 \end{aligned}$$

となる。

(b) 円筒状の環 (中心軸)



円筒座標を用いる。質量は

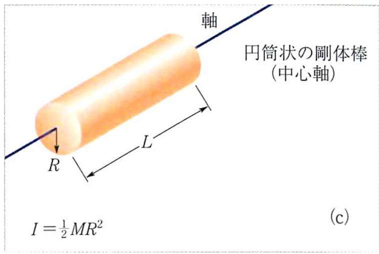
$$\begin{aligned} M = \iiint \rho r dr d\theta dz &= \rho \left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_1}^{R_2} \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[z\right]_0^L \\ &= \pi\rho(R_2^2 - R_1^2)L \end{aligned}$$

$r' = r$ である。慣性モーメントは

$$I = \iiint \rho r^3 dr d\theta dz = \rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_1}^{R_2} [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^L$$
$$= \frac{1}{2}\pi\rho(R_2^4 - R_1^4)L$$
$$= \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$

となる。

(c) 円筒状の剛体棒 (中心軸)



円筒座標を用いる。質量は

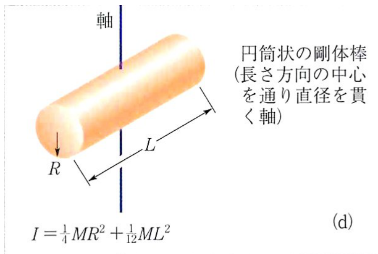
$$M = \iiint \rho r dr d\theta dz = \rho \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^L$$
$$= \pi\rho R^2 L$$

$r' = r$ である。慣性モーメントは

$$I = \iiint \rho r^3 dr d\theta dz = \rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^L$$
$$= \frac{1}{2}\pi\rho R^4 L$$
$$= \frac{1}{2}MR^2$$

となる。

(d) 円筒状の剛体棒 (長さ方向の中心を通る軸)



円筒座標を用いる。質量は (c) と同じ。

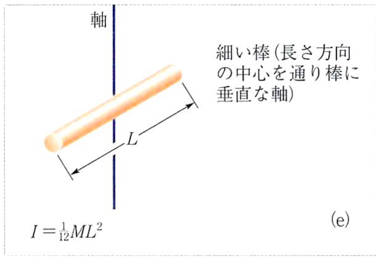
$$M = \pi\rho R^2 L$$

$r'^2 = x^2 + z^2$ である。慣性モーメントは

$$I = \iiint \rho(x^2 + z^2) r dr d\theta dz = \rho \iiint (r^3 \cos^2\theta + z^2 r) dr d\theta dz$$
$$= \rho \iiint \left(r^3 \frac{\cos 2\theta + 1}{2} + z^2 r\right) dr d\theta dz$$
$$= \rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} [z]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \rho \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{4}\rho R^4 L + \frac{\pi}{12}\rho R^2 L^3$$
$$= \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

となる。

(e) 円筒状の剛体棒 (長さ方向の中心を通る軸)



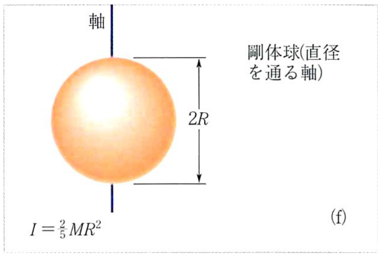
(d) の $R \ll L$ の場合である。慣性モーメントは

$$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 \approx \frac{1}{12}ML^2 \qquad (R \ll L)$$

となる。

(f) 剛体球 (直径を通る軸)

球座標を用いる。質量は



$$\begin{aligned} M &= \iiint \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \rho \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [-\cos\theta]_0^\pi [\phi]_0^{2\pi} \\ &= \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \end{aligned}$$

$r'^2 = x^2 + y^2$ である。慣性モーメントは

$$I = \iiint \rho(x^2+y^2) r^2 dr d\theta d\phi = \rho \iiint r^4 \sin^3\theta dr d\theta d\phi$$

ここで

$$\begin{aligned} \int \sin^3\theta d\theta &= \int (1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta \\ &= \int (t^2-1)dt \qquad (\cos\theta = t \text{ とおいた}) \\ &= \frac{t^3}{3} - t \end{aligned}$$

を用いると

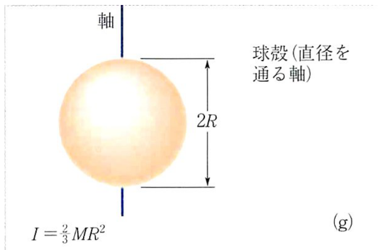
$$\begin{aligned} I &= \rho \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^{-1} [\phi]_0^{2\pi} \\ &= \frac{8}{15}\pi\rho R^5 \\ &= \frac{2}{5}MR^2 \end{aligned}$$

となる。

(g) 球殻 (直径を通る軸)

球座標を用いる。質量は

$$\begin{aligned} M &= \iint \rho R^2 \sin\theta d\theta d\phi = \rho R^2 [-\cos\theta]_0^\pi [\phi]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi\rho R^2 \end{aligned}$$

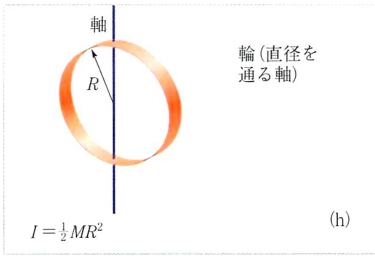


$r'^2 = x^2 + y^2$ である。慣性モーメントは

$$
\begin{aligned}
I = \iint \rho(x^2+y^2)R^2 \sin\theta d\theta d\phi &= \rho R^4 \iint \sin^3\theta d\theta d\phi \\
&= \rho R^4 \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^{-1} [\phi]_0^{2\pi} \\
&= \frac{8}{3}\pi\rho R^4 \\
&= \frac{2}{3}MR^2
\end{aligned}
$$

となる。

(h) 輪 (直径を通る軸)



円筒座標を用いる。質量は (a) と同じ。

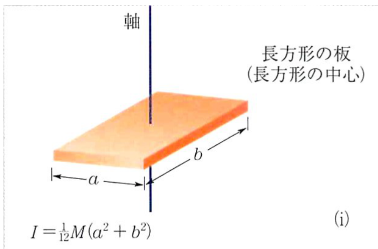
$$
M = 2\pi\rho RL
$$

$r'^2 = x^2 + z^2$ である。慣性モーメントは

$$
\begin{aligned}
I = \iint \rho(x^2+z^2)Rd\theta dz &= \rho R \iint \left(R^2\frac{\cos 2\theta + 1}{2} + z^2\right) d\theta dz \\
&= \rho R^3 \left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} [z]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \rho R [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\pi\rho R^3 L + \frac{3}{2}\pi\rho RL^3 \\
&= \frac{1}{2}MR^2 + \frac{3}{4}ML^2 \\
&\approx \frac{1}{2}MR^2 \quad (R \gg L)
\end{aligned}
$$

となる。

(i) 長方形の板 (長方形の中心を通る軸)



直交座標を用いる。質量は

$$
\begin{aligned}
M = \iint \rho dxdy &= \rho [x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [y]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \\
&= \rho ab
\end{aligned}
$$

$r'^2 = x^2 + y^2$ である。慣性モーメントは

$$
\begin{aligned}
I = \iint \rho(x^2+y^2)dxdy &= \rho \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [y]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} + \rho [x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \\
&= \frac{1}{12}\rho a^3 b + \frac{1}{12}\rho ab^3 \\
&= \frac{1}{12}M(a^2+b^2)
\end{aligned}
$$

となる。