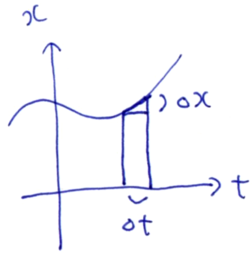
微分と積分

高 杉

微分

関数 $x(t)$ の微小区間 $t \sim t+\Delta t$ における平均変化率の極限として微分を定義する。

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$



たとえば、$x = ct$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c(t+\Delta t) - ct}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c\Delta t}{\Delta t} = c$$

$x = ct^2$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c(t+\Delta t)^2 - ct^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{ct^2 + 2ct\Delta t + c(\Delta t)^2 - ct^2}{\Delta t} = 2ct$$

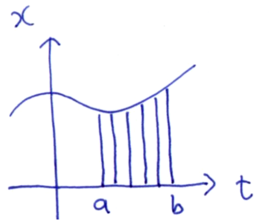
$x = ct^n$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c(t+\Delta t)^n - ct^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{ct^n + nct^{n-1}\Delta t + \cdots - ct^n}{\Delta t} = nct^{n-1}$$

となる。

積分

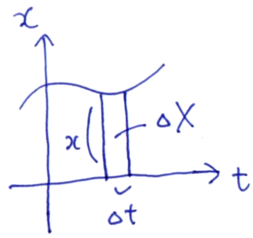
区間 $a \sim b$ におけるグラフの面積として定積分を定義する。



$$X = \int_a^b x dt$$

これから不定積分が定義できる。

$$\int x dt = X(t) + C$$



C は積分定数である。微小区間 $t \sim t+\Delta t$ における積分は

$$x\Delta t = \Delta X$$

であるので、極限をとると

$$x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{dX}{dt}$$

となる。つまり、積分 X は微分すると x になるような関数である。これから

$$\int c dt = ct + C$$

$$\int ct dt = \frac{1}{2}ct^2 + C$$

$$\int ct^n dt = \frac{1}{n+1}ct^{n+1} + C$$

が求められる。