強制振動

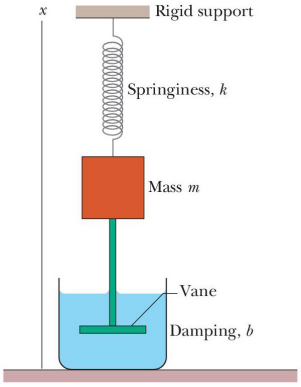
高 杉

強制振動

図のばねをつるしている支持板を振動数 ω_d で振動させることを考える。支持板の変位によって

$$F(t) = mf_0 \cos \omega_d t$$

の外力が加えられる。運動方程式は



$$m\frac{d^2x}{dx^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = mf_0 \cos \omega_d t$$

となる。ここで、

$$\gamma = \frac{b}{2m}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

とおくと、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega_d t$$

となる。

強制振動の解

特殊解を

$$x_p = a\cos(\omega_d t + \phi)$$

とおいて上の式の x に代入すると、

$$a(\omega_0^2 - \omega_d^2)\cos(\omega_d t + \phi) - 2a\gamma\omega_d \sin(\omega_d t + \phi) = f_0 \cos \omega_d t$$

となる。三角関数の加法定理を用いて展開して整理すると

$$a\{(\omega_0^2 - \omega_d^2)\cos\phi - 2\gamma\omega_d \sin\phi\}\cos\omega_d t - a\{(\omega_0^2 - \omega_d^2)\sin\phi + 2\gamma\omega_d \cos\phi\}\sin\omega_d t = f_0 \cos\omega_d t$$

となる。これが任意の t に対して成り立つためには

$$a\{(\omega_0^2 - \omega_d^2)\cos\phi - 2\gamma\omega_d \sin\phi\} = f_0$$
$$a\{(\omega_0^2 - \omega_d^2)\sin\phi + 2\gamma\omega_d \cos\phi\} = 0$$

となる必要がある。これから

$$a^2\{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (2\gamma\omega_d)^2 = f_0^2$$

より

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (2\gamma\omega_d)^2}}$$

が得られる。特殊解は

$$x_p = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (2\gamma\omega_d)^2}} \cos(\omega_d t + \phi)$$

となる。

解の吟味

抵抗力が弱く、$\omega_0 > \gamma$ (減衰振動) を考えると、一般解は

$$x = ce^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (2\gamma\omega_d)^2}} \cos(\omega_d t + \phi)$$

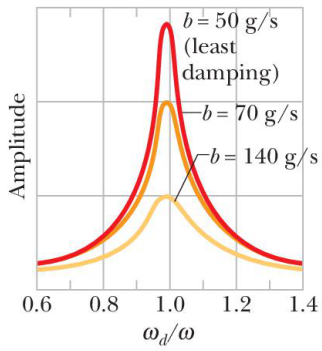
となり、$t \longrightarrow \infty$ の極限で第 1 項が消滅して

$$x \longrightarrow \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (2\gamma\omega_d)^2}} \cos(\omega_d t + \phi)$$

となる。すなわち、周期的な外力と同じ振動数で振動するようになる。振幅は

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (2\gamma\omega_d)^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\{\omega_d^2 - (\omega_0^2 - 2\gamma^2)\}^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}}$$

であり、$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ のとき最大値

$$a_{max} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

をとる。