減衰振動

高 杉

振動の方程式

質量 m、ばね定数 k の振動子に減衰定数 b をもつ減衰力を加える。運動方程式は

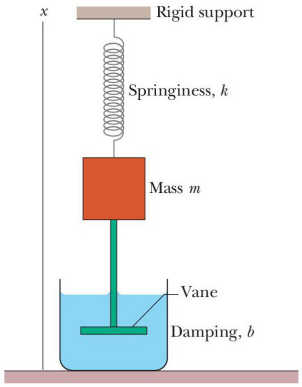
$$m\frac{d^2x}{dx^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$$

となる。 解の形を

$$x=e^{\lambda t}$$

とおくと

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda^2 x$$



より

$$m\lambda^2+b\lambda+k=0$$

が得られる。この解は

$$\lambda=\frac{1}{2m}\left(-b\pm\sqrt{b^2-4mk}\right)$$

である。

減衰振動

$b^2<4mk$ のとき、ルートの中が負になり虚数となる。

$$\lambda=-\frac{b}{2m}\pm i\omega$$

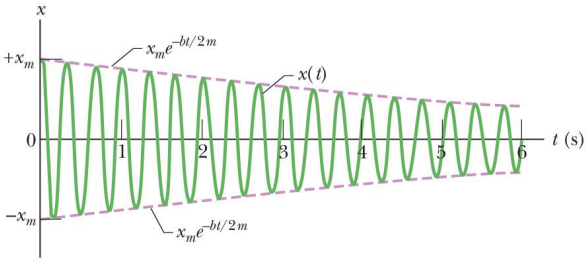
と表される。ここで

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}}$$

である。解は 2 つの解の線形結合で表される。

$$\begin{aligned}x&=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}\\&=c_1e^{-\frac{b}{2m}t}e^{i\omega t}+c_2e^{-\frac{b}{2m}t}e^{-i\omega t}\\&=e^{-\frac{b}{2m}t}\left\{(c_1+c_2)\cos\omega t+i(c_1-c_2)\sin\omega t\right\}\\&=ce^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t+\phi)\end{aligned}$$

となり、$b>0$ であれば振幅は指数関数的に減少する。



過減衰

$b^2 > 4mk$ のとき、ルートの中が正であるので振動しない。

$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \gamma$$

となる。ここで

$$\gamma = \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

である。解は 2 つの解の線形結合で表される。

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= c_1 e^{-(\frac{b}{2m} - \gamma)t} + c_2 e^{-(\frac{b}{2m} + \gamma)t} \end{aligned}$$

となる。

臨界減衰

$b^2 = 4mk$ のとき、重根となる。

$$\lambda = -\frac{b}{2m}$$

となる。このときの解は次のようになる。

$$\begin{aligned} x &= (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \\ &= (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{b}{2m}t} \end{aligned}$$