第14回　強制振動と共鳴

物体に周期的外力がはたらく

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) = m f_0 \cos(\Omega t)$$

運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha\frac{dx}{dt} + mf_0\cos(\Omega t)$$

解を求める

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\Omega t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad 2\gamma = \frac{\alpha}{m}$$

特殊解を $x_p = a\cos(\Omega t - \phi)$ とおくと

$$a(\omega_0^2 + \Omega^2)\cos(\Omega t - \phi) - 2\gamma\Omega a \sin(\Omega t - \phi) = f_0\cos(\Omega t)$$

これから

$$a\{(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos\phi + 2\gamma\Omega a\sin\phi\} = f_0$$

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

$$x_p = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}\cos(\Omega t - \phi)$$

一般解は

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}\cos(\Omega t - \phi)$$

$$\to \frac{f_0}{\sqrt{\{\Omega^2 - (\omega^2 - 2\gamma^2)\}^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}}\cos(\Omega t - \phi) \quad (t \to \infty)$$

となって Ω で振動する。

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ のとき振幅は最大値

$$a_{max} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

をとり、共振する。$Q = \omega_0/\gamma$ が共振の鋭さを与える。