第13回　減衰振動

粘性抵抗力がはたらく場合の振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha\frac{dx}{dt}$$

解を求める

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad 2\gamma = \frac{\alpha}{m}$$

解を $x = e^{\lambda t}$ とおくと

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda\omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\zeta = \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}} \quad \text{（減衰率）}$$

1. $0 < \zeta < 1$ のとき（減衰振動）

$$\lambda_\pm = -\gamma \pm i\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

一般解は

$$x = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} = e^{-\gamma t}(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t})$$
$$= Ce^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{（減衰角振動数）}$$

2. $\zeta = 1$ のとき（臨界減衰）

$$\lambda = -\gamma \quad \text{（重根）}$$

一般解は

$$x = (At + B)e^{-\gamma t}$$

3. $\zeta > 1$ のとき（過減衰）

$$\lambda_\pm = -\gamma \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$$

一般解は

$$x = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}$$