第 11 回　エネルギー保存の法則

座標 $\boldsymbol{r}$ におけるポテンシャルエネルギーは

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

ポテンシャルエネルギーの変化は

$$\Delta U = U(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \Delta\boldsymbol{r}$$

これから

$$F_x(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x}$$
$$F_y(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial y}$$
$$F_z(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x}\boldsymbol{e}_x - \frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial y}\boldsymbol{e}_y - \frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial z}\boldsymbol{e}_z = -\nabla U(\boldsymbol{r})$$

- 演算子 (nabla)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

保存力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ と非保存力 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r})$ が作用するとき

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r})$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_A^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} + \int_A^B \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\Delta E = E_B - E_A = \int_A^B \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

力学的エネルギーの変化は非保存力のした仕事に等しい。